Klausur (Mathematik II) - Wintersemester 2013/14

Name: ________________________ Matrikel-Nr: ____________________

EMail: ____________________________________ (optionale Schnell-Korrektur)

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Punkte	10	12	10	10	10	16	12	20

Als Hilfsmittel sind die von dem Lehrbeauftragten zur Verfügung gestellten sowie eigene Unterlagen zugelassen (Skripte und Musteraufgaben sowie deren Lösungen). Bücher und elektronische Hilfsmittel sind nicht gestattet.

1. Gegeben sei die Menge $\mathrm{M} = \{x \in \mathbb{Z}^{>0} | x mod 2 = 0\}$ (geraden, positiven Zahlen). Begründen Sie, ob es sich bei $\varDelta$ um eine Ordnungs- oder um eine Äquivalenzrelation (inkl. der Äquivalenzklassen) handelt.

$$\varDelta = \left\{(x;y) \in \mathrm{M} \times \mathrm{M} \middle| \frac{x}{y} = \beta^2; \beta \in \mathbb{N}_0\right\}$$

2. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion den folgenden Zusammenhang.

$$3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = 2n^2 + n; n \geq 1$$

3. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 4}\left(\frac{10 \cdot (3x - 12)}{2 \cdot \sqrt{20 - x} - 4 \cdot \sqrt{x}}\right)$ auf zwei Arten, mittels

   a) Erweiterung durch das 3. Binom.
   b) Regel von L'Hospital.

4. Geben Sie zu der Funktion $f(x) = 2 \cdot sin^2(0{,}25 \cdot x + 10{,}5\pi) - 5$ die Periode, das Symmetrieverhalten, und die Amplituden (Wertebereich) an und beweisen Ihre Ergebnisse.

5. Bestimmen Sie die Fläche, die von den beiden Parabeln $f(x) = 2 \cdot (x - 2)^2 - 15$ und $g(x) = 3 - (x + 1)^2$ eingeschlossen wird.

6. Die rekursive Folge $a_{n+1} = a_n^2 + 0{,}25;\ a_1 = 0$ ist für $n \geq 1$ definiert. Zeigen Sie:

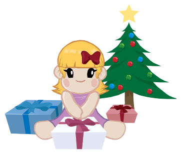
   a) Die Folge ist streng monoton wachsend oder fallend.
   b) Die Folge besitzt eine obere und untere Schranke.
   c) Die Folge ist konvergent.
   d) Berechnen Sie den Grenzwert.

7. Begründen Sie in Aufgabe a) die Konvergenz und bestimmen in Aufgabe b) den Wert der gegebenen Reihe.

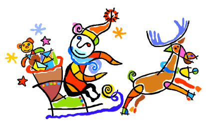
   a) $\sum 42 \cdot \frac{0{,}5^{2k} \cdot \sqrt[3]{k}}{\sqrt{k \cdot 16^k}}$ b) $18 \cdot \sum\limits_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1}{k^2} - (1{,}5)^{-k}\right]$

8. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4 \cdot \ln\sqrt{9 - 2x}$.

   a) Geben Sie den maximalen Definitions- und Wertebereich an (Begründung).
   b) Berechnen Sie das 4. Taylorpolynom $P_4(x,4)$ (ohne Fehlerabschätzung)
   c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion und deren 1. Ableitung.



HoHoHo!!!
Da konnte ich zum Schluss bestimmt alle Ihre Wünsche erfüllen.



Torsten Schreiber 05.12.2013

Lückentext (Mathematik II) zum Wintersemester 2013/14

Name: ____________________ Matrikel-Nr.: ____________________

Mit diesem Lückentext können Sie bis zu maximal 10 mögliche Zusatzpunkte erlangen. Für jedes richtig eingetragene Wort ergibt sich somit ein Bonuspunkt.

Wird eine Funktion an der **1. Winkelhalbierenden** gespiegelt, so erhält man die zugehörige Umkehrfunktion.

Ist eine Relation **reflexiv**, transitiv und symmetrisch, so handelt es sich um eine **Äquivalenzrelation**.

Um die **Konvergenz** einer Reihe mit **Alternierungswert** zu zeigen, benutzt man stets das Leibnizkriterium.

Hat eine Funktion eine Ecke in dem zugehörigen Graphen (Betragsfunktion), so ist sie an dieser Stelle nicht **differenzierbar**.

Bei einem Hochpunkt, muss die **zweite** Ableitung kleiner Null sein, da dort die Funktion **rechts** herum dreht.

Durch das **Restglied** des Taylorpolynoms wird der mögliche Fehler beschrieben.

Damit man die Fläche zwischen zwei Funktionen berechnen kann, werden im ersten Schritt die **Schnittpunkte** der beiden Terme bestimmt.

Konvergenz **Fakultäten** **zweite** **Äquivalenzrelation** **y-Achse**

stetig **Ordnungsrelation** **erste** **Restglied** **differenzierbar** **Nullstellen**

Alternierungswert **Schnittpunkte** **Startelement** **reflexiv** **rechts**

links **Monotonie** **stetig** **1.Winkelhalbierenden**

Musterlösung Klausur Mathematik II Wintersemester 2013/14

1) $\varDelta = \left\{(x;y) \in \mathrm{M} \times \mathrm{M} \middle| \frac{x}{y} = \beta^2; \beta \in \mathbb{N}_0\right\}$

reflexiv: $(x;x) \in \varDelta, x \in \mathrm{M}$

$$\frac{x}{x} = 1 = \beta^2 \Leftrightarrow \beta = 1 \in \mathbb{N}_0$$

transitiv: $(x;y) \in \varDelta \ \wedge \ (y;z) \in \varDelta \ \Rightarrow (x;z) \in \varDelta; \ x,y,z \in \mathrm{M}$

$$\frac{x}{y} = \beta_1^2 \wedge \frac{y}{z} = \beta_2^2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \beta_1^2 \wedge y = z \cdot \beta_2^2$$

$$\frac{x}{z \cdot \beta_2^2} = \beta_1^2 \Rightarrow \frac{x}{z} = \beta_1^2 \cdot \beta_2^2 = (\beta_1 \cdot \beta_2)^2 = \beta_3^2; \ \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{N}_0$$

antisymmetrisch: $(x;y) \in \varDelta \ \wedge \ (y;x) \in \varDelta \ \Rightarrow x = y \, ; x,y \in \mathrm{M}$

$$\frac{x}{y} = \beta_1^2 \wedge \frac{y}{x} = \beta_2^2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \beta_1^2 \wedge y = x \cdot \beta_2^2$$

$$\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x} \cdot \beta_2^2} = \beta_1^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}} = 1 = \beta_1^2 \cdot \beta_2^2 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 1$$

Damit ist bewiesen, dass es sich um Ordnungsrelation handelt.

2) $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = \sum(4k - 1) = 2n^2 + n$

Induktionsanfang:

$n = 1$: $(4 \cdot 1 - 1) = 3 = 2 \cdot 1^2 + 1$

Induktionsschluss:

$n = n + 1$:

$$2n^2 + n + 4 \cdot (n + 1) - 1 = 2 \cdot (n + 1)^2 + (n + 1)$$
$$2n^2 + n + 4n + 4 - 1 = 2 \cdot (n^2 + 2n + 1) + n + 1$$
$$2n^2 + 5n + 3 = 2n^2 + 5n + 3$$
$$0 = 0$$

3) a) $$\lim_{x\to4}\left(\frac{10\cdot(3x-12)}{2\cdot\sqrt{20-x}-4\cdot\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to4}\left(\frac{10\cdot(3x-12)}{2\cdot\sqrt{20-x}-4\cdot\sqrt{x}}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{20-x}+4\cdot\sqrt{x}}{2\cdot\sqrt{20-x}+4\cdot\sqrt{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to4}\left(\frac{10\cdot(3x-12)\cdot\left(2\cdot\sqrt{20-x}+4\cdot\sqrt{x}\right)}{4\cdot(20-x)-16\cdot x}\right) = \lim_{x\to4}\left(\frac{30\cdot(x-4)\cdot\left(2\cdot\sqrt{20-x}+4\cdot\sqrt{x}\right)}{80-20x}\right)$$

$$\lim_{x\to4}\left(\frac{30\cdot(x-4)\cdot\left(2\cdot\sqrt{20-x}+4\cdot\sqrt{x}\right)}{-20\cdot(x-4)}\right) = -\frac{3}{2}\cdot\left(2\cdot\sqrt{20-4}+4\cdot\sqrt{4}\right) = -\frac{3}{2}\cdot16 = -24$$

b) $$\lim_{x\to4}\left(\frac{30x-120}{2\cdot\sqrt{20-x}-4\cdot\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to4}\left(\frac{30}{\frac{2}{2\cdot\sqrt{20-x}}\cdot(-1)-\frac{4}{2\cdot\sqrt{x}}}\right) = \frac{30}{-\frac{1}{\sqrt{16}}-\frac{2}{\sqrt{4}}} = \frac{30}{-\frac{5}{4}} = -24$$

4) $f(x) = 2 \cdot sin^2(0{,}25 \cdot x + 10{,}5\pi) - 5$

$$f(x) = 2 \cdot \left[\sin\left(\frac{1}{4}x + 10{,}5 \cdot \pi\right)\right]^2 - 5 = 2 \cdot \left[\sin\left(\frac{1}{4}x\right) \cdot cos(10{,}5\pi) + \cos\left(\frac{1}{4}x\right) \cdot sin(10{,}5\pi)\right]^2 - 5$$

$$f(x) = 2 \cdot \left[\sin\left(\frac{1}{4}x\right) \cdot 0 + \cos\left(\frac{1}{4}x\right) \cdot (1)\right]^2 - 5 = 2 \cdot cos^2\left(\frac{1}{4}x\right) - 5$$

Periode: $P_{NEU} = \frac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi \Rightarrow f(x) = f(x + 4\pi)$

$$f(x + 4\pi) = 2 \cdot \left[cos\left(\tfrac{1}{4} \cdot (x + 4\pi)\right)\right]^2 - 5 = 2 \cdot \left[cos\left(\tfrac{1}{4}x + \pi\right)\right]^2 - 5$$
$$f(x + 4\pi) = 2 \cdot \left[sin\left(\tfrac{1}{4}x\right) \cdot sin(\pi) + cos\left(\tfrac{1}{4}x\right) \cdot cos(\pi)\right]^2 - 5$$
$$f(x + 4\pi) = 2 \cdot \left[sin\left(\tfrac{1}{4}x\right) \cdot 0 + cos\left(\tfrac{1}{4}x\right) \cdot (-1)\right]^2 - 5 = 2 \cdot cos^2\left(\tfrac{1}{4}x\right) - 5$$
$$f(x + 4\pi) = f(x)$$

Achsensymmetrie: $f(x) = f(-x)$

$$f(-x) = 2 \cdot \left[cos\left(\tfrac{1}{4} \cdot (-x)\right)\right]^2 - 5 = 2 \cdot \left[cos\left(\tfrac{1}{4}x\right)\right]^2 - 5$$
$$f(-x) = 2 \cdot cos^2\left(\tfrac{1}{4}x\right) = f(x)$$

Amplituden: $W = 2 \cdot [0; 1] - 5 = [0; 2] - 5 \Rightarrow y \in [-5; -3]$

5) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2 \cdot (x - 2)^2 - 15 = 3 - (x + 1)^2$

$$2 \cdot (x^2 - 4x + 4) - 15 = 3 - (x^2 + 2x + 1) \Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 7 = -x^2 - 2x + 2$$
$$3x^2 - 6x - 9 = 3 \cdot (x^2 - 2x - 3) = 3 \cdot (x - 3) \cdot (x + 1)$$

$$\int_{-1}^{3} \left(3x^2 - 6x - 9\right) dx = \left|F(3) - F(-1)\right|$$
$$F(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$$
$$F(3) = 27 - 27 - 27 = -27$$
$$F(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$$

$$\int_{-1}^{3} \left(3x^2 - 6x - 9\right) dx = \left|-27 - 5\right| = 32$$

Die Fläche zwischen den beiden Funktionen beträgt 32 FE.

6) $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}; a_1 = 0, n \geq 1$

$a_1 = 0;\ a_2 = (0)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

a) Monotonie: Behauptung: $a_n < a_{n+1}$ (streng monoton steigend)

Induktionsanfang:

$n = 1$: $a_1 = 0 < \frac{1}{4} = a_2$

Induktionsschluss:

$n = n + 1$: $a_{n+1} < a_{n+2}$

$a_n^2 + \frac{1}{4} < a_{n+1}^2 + \frac{1}{4}$

$a_n^2 < a_{n+1}^2$

$a_n < a_{n+1}$

b) Schranken: Da die Folge streng monoton steigend ist muss $\mathrm{a}_1 = 0$ eine untere Schranke sein.

Behauptung: $a_n < \frac{1}{2}$ (untere Schranke)

Induktionsanfang:

$n = 1$: $a_1 = 0 > \frac{1}{2}$

Induktionsschluss:

$n = n + 1$: $a_{n+1} < \frac{1}{2}$

$a_n < \frac{1}{2}$

$a_n^2 < \frac{1}{4}$

$a_n^2 + \frac{1}{4} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$a_{n+1} < \frac{1}{2}$

c) Konvergenz: Da die Folge streng monoton steigend ist und durch das Intervall $\left[0; \frac{1}{2}\right[$ beschränkt ist, muss sie konvergent sein und der Grenzwert existieren.

d) Grenzwert: $\lim_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{a_{n+1}}$ und $\lim_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = \alpha$

$\alpha^2 + \frac{1}{4} = \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4} = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \propto = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathrm{a_{n+1}} = \frac{1}{2} \in \left[0; \frac{1}{2}\right[$

7) a) $\sum 42 \cdot \frac{0{,}5^{2k} \cdot \sqrt[3]{k}}{\sqrt{k \cdot 16^k}}$ Wurzelsatz

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{42 \cdot \frac{0{,}5^{2k} \cdot \sqrt[3]{k}}{\sqrt{k \cdot 16^k}}} = \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \frac{0{,}25 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{16}} = \frac{1}{16} < 1$$

b) $18 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{k^2} - (1{,}5)^{-k} \right] = 18 \cdot \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^k \right)$ Reihenwert

$$18 \cdot \left(\left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) - \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} - 1 - \frac{2}{3} \right) \right) = 18 \cdot \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 - \left(\frac{4}{3} \right) \right) = 3\pi^2 - 42$$

8) $f(x) = 4 \cdot \ln \sqrt{9 - 2x} = 4 \cdot \ln(9 - 2x)^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(9 - 2x) = 2 \cdot \ln(9 - 2x)$

a) Definitions- /Wertebereich: $9 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 4{,}5$

$\Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}^{<4{,}5};\ \mathbb{W} = \mathbb{R}$

b) Taylorpolynom:

$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{9-2x} \cdot (-2) = -\frac{4}{9-2x} = -4 \cdot (9 - 2x)^{-1}$

$f''(x) = -4 \cdot (9 - 2x)^{-2} \cdot (-1) \cdot (-2) = -8 \cdot (9 - 2x)^{-2}$

$f'''(x) = -8 \cdot (9 - 2x)^{-3} \cdot (-2) \cdot (-2) = -32 \cdot (9 - 2x)^{-3}$

$f''''(x) = -32 \cdot (9 - 2x)^{-4} \cdot (-3) \cdot (-2) = -192 \cdot (9 - 2x)^{-4}$

n	$f^n(4)$	$(x-4)^n$	$n!$
0	0	1	1
1	-4	$x-4$	1
2	-8	$(x-4)^2$	2
3	-32	$(x-4)^3$	6
4	-192	$(x-4)^4$	24

$$P_4(x, 4) = 0 - 4 \cdot (x - 4) - 4 \cdot (x - 4)^2 - \frac{16}{3} \cdot (x - 4)^3 - 8 \cdot (x - 4)^4$$

c) Umkehrfuktion:

$f(x) = y = 2 \cdot ln(9 - 2x) \Leftrightarrow \frac{y}{2} = ln(9 - 2x) \Leftrightarrow e^{\frac{y}{2}} = 9 - 2x$

$e^{\frac{y}{2}} - 9 = -2x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{y}{2}} - 9 \right) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{y}{2}}$

$f^{-1}(x) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} = 4{,}5 - 0{,}5 \cdot \sqrt{e^x}$

$\left(f^{-1}(x) \right)' = -\frac{1}{4} \cdot e^{\frac{x}{2}} = -0{,}25 \cdot \sqrt{e^x}$